

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет»  
Институт математики, физики, информатики и технологий  
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

# ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗ ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

# Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование»  
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:  
Заведующий кафедрой

дата

ПОДПИСЬ

оценка

Исполнитель:

Чипуштанов Иван Сергеевич,  
обучающийся группы МАТ-1501

ПОДПИСЬ

Научный руководитель:

Аввакумова Ирина Александровна,  
канд. пед. наук, доцент

ПОДПИСЬ

Екатеринбург 2019

## Оглавление

Введение.....	3
Глава I. Психолого-педагогические особенности использования геометрических задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.....	5
1.1. Понятие познавательных универсальных учебных действий, их структура и виды.....	5
1.2. Использование задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.....	14
Выводы по главе I. ....	28
Глава II. Методические аспекты формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе работы с задачами без числовых данных с точки зрения их определяемости.....	29
2.1. Формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся на этапе анализа задачи без числовых данных с точки зрения её определяемости.....	29
2.2. Комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.....	33
Вывод по главе II.....	41
Заключение .....	42
Список литературы .....	44

## Введение

В настоящее время одним из основных направлений Федерального государственного образовательного стандарта Основного общего образования является формирование универсальных учебных действий, способности их использования в учебной, социальной и профессиональной практике.

Одним из видов универсальных учебных действий являются познавательные универсальные учебные действия. Формирование познавательных учебных действий происходит в процессе обучения различным школьным предметам, в частности, математике. Математика за счёт предметного содержания характеризуется разнообразием средств, которые можно использовать для формирования данных универсальных учебных действий.

Одним из таких средств являются задачи без числовых данных.

**Объект исследования:** процесс обучения математике в основной школе.

**Предмет исследования:** задачи без числовых данных как средство формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий в процессе обучения математике.

**Цель исследования:** разработать комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий на уроках геометрии.

Исходя из цели, были поставлены следующие задачи:

- 1) на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы определить понятие и виды познавательных универсальных учебных действий;
- 2) выявить возможности задач без числовых данных для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся на уроках геометрии;

3) проиллюстрировать на конкретном примере теоретические положения формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся при работе с задачей без числовых данных;

4) разработать комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

Работа состоит из двух глав, в каждой – по два параграфа. В первой главе даётся определение понятия «познавательные универсальные учебные действия», структура данного рода действий, их функции и виды. Далее определяется понятие «задачи без числовых данных», соотносятся этапы решения данного вида задач с компонентами познавательных универсальных действий с целью выявить возможности задач без числовых данных для формирования познавательных универсальных учебных действий.

Во второй главе приведён пример организации деятельности обучающихся по формированию познавательных универсальных учебных действий при работе с задачами без числовых данных, а также представлен комплект задач без числовых данных.

# **Глава I. Психолого-педагогические особенности использования геометрических задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий**

## **1.1. Понятие познавательных универсальных учебных действий, их структура и виды**

Познавательные универсальные учебные действия являются основополагающими среди всех универсальных учебных действий, выделенных в Федеральном государственном образовательном стандарте [1], так как это одни из ведущих видов деятельности человека, направленных на приобретение информации об объектах и явлениях действительности и различных знаний.

Рассмотрим определения термина «познавательные универсальные учебные действия» авторов, в работах которых изучались познавательные универсальные учебные действия.

Л.И. Боженкова определяет «познавательные действия» как «действия, которые обеспечивают познание», которое определяется ей же как «умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку»[3].

А.Г. Асмолов предлагает следующее определение: «Познавательные универсальные учебные действия – это сложные формы опосредствования познавательной деятельности; переработка и структурирование информации (работа с текстом, смысловое чтение); формирование элементов комбинаторного мышления как одного из компонентов гипотетико-дедуктивного интеллекта; работа с научными понятиями и освоение общего приёма доказательства как компонента воспитания логического мышления» [Error! Reference source not found.].

Л. В. Ведерникова рассматривает познавательные универсальные учебные действия как систему способов познания окружающего мира, построения самостоятельного процесса поиска, исследования и совокупности

операций по обработке, систематизации, обобщению и использованию полученной информации [6].

И. Д. Лушников и Е. Ю. Ногтева определяют познавательные универсальные учебные действия как действия, обеспечивающие научно-ориентированное познание мира и развитие познавательных функций личности [15].

Н.А. Чуланова и Т.Н. Черняева формулируют определение следующим образом: «Познавательные универсальные учебные действия – это умственные действия, направленные на планирование, осуществление анализа своей познавательной деятельности и управление ею, на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях» [26].

В качестве определения познавательных универсальных учебных действий выберем определение А. Г. Асмолова, поскольку в нём учтены основные виды деятельности обучающихся. В отличие от данного определения, определение Л. И. Боженковой не отражает основные действия, входящие в состав познавательных универсальных учебных действий. Определения, данные Л. А. Чулановой и Т. Н. Черняевой и Г. В. Соболевой, И. С. Тактаровой и И. А. Садыковой, учитывают основные виды деятельности обучающихся, но не отражает основные черты познавательных универсальных учебных действий, представленных в Федеральном государственном образовательном стандарте Основного общего образования.

Рассмотрим структуру познавательных универсальных учебных действий.

Н. М. Горленко и О. В. Запятая предлагают следующую структуру познавательных универсальных учебных действий:

- общеучебные универсальные действия;
- логические универсальные действия;

- постановка и решение проблемы [10].

Под общеучебными универсальными действиями понимаются умения поставить учебную задачу, найти информацию о ней и выбрать способы её решения, умения работать и структурировать полученную информацию.

Поиск той или иной информации в эпоху информационных технологий, в которой мы живём, не предоставляет большого труда для обучающихся. Однако уметь ставить перед собой грамотно сформулированную проблему и искать ту информацию, которая, действительно, поможет достижению конкретной цели, - это мастерство, которому обучающиеся должны научиться.

Большую значимость среди общеучебных познавательных универсальных учебных действий составляют знаково-символические действия, к которым относятся моделирование и преобразование моделей с целью выявления общих законов определяющих данную предметную область.

Важно также отметить такое общеучебное универсальное учебное действие, как рефлексия. Проведение обучающимися рефлексии позволяет им повысить осознанность всех компонентов деятельности.

С. Г. Воровщиков и Е. В. Орлова выделяют три вида общеучебных умений:

- учебно-управленческие (умения, обеспечивающие планирование, контроль, организацию, регулирование и анализ собственной учебной деятельности обучающихся;
- учебно-информационные (умения, обеспечивающие нахождение, переработку и использование информации для решения учебных задач, умение работать и письменными и устными текстами);
- учебно-логические (умения, обеспечивающие чёткую структуру постановки и решения учебных задач, в них входят анализ, синтез, сравнение, обобщение и классификация, определение понятий,

доказательство и опровержение, определение и решение учебных проблем) [7].

Под логическими универсальными действиями понимаются умения анализировать и синтезировать полученную информацию, устанавливать причинно-следственные связи, доказывать свои суждения. Данные действия необходимы для формирования общих способов умственной деятельности, необходимых для занятий математикой [15].

Постановка и решение проблемы подразумевают умения сформулировать и найти способы решения проблемы.

Выделим более подробный пооперационный состав каждого элемента познавательных универсальных учебных действий (таблица 1) [8].



**Таблица 1.**

**Структура познавательных универсальных учебных действий**

<i>Элементы познавательных универсальных учебных действий</i>	<i>Описание</i>	<i>Пооперационный состав элементов познавательных универсальных учебных действий</i>
1	2	3
<b>Общеучебные</b>		
Умение структурировать знания (моделировать, схематизировать).	Мыслительная деятельность, в процессе которой между изучаемыми объектами устанавливаются отношения и связи на основе выбранного принципа.	1) умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; 2) умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; 3) умение устанавливать связи между объектами; 4) умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы; 5) умение достраивать недостающие элементы совокупности.
Умение производить контроль и оценку результатов и процессов деятельности.	Мыслительная деятельность, предполагающая сравнение наличного состояния объекта (процесса) с образцом (эталонном).	1) умение выделить критерии для оценки результата или процесса; 2) умение оценить по заданной системе критериев; 3) умение находить ошибки в решении.

**Продолжение таблицы 1.**

**Структура познавательных универсальных учебных действий**

1	2	3
Умение выбирать наиболее простые способы решения задач в зависимости от конкретных условий.	Мыслительная деятельность, предполагающая выделение нескольких вариантов решений одной проблемы с дальнейшим выбором оптимального при помощи сравнения по заданным условиям.	1) умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях; 2) умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым; 3) умение решить задачу несколькими способами.
Логические		
Умение анализировать.	Мыслительная деятельность, которая состоит в разделении целого на части, элементы, в выделении отдельных его признаков, компонентов и аспектов.	1) умение разделять объект на части; 2) умение располагать части в определенной последовательности; 4) умение характеризовать части этого объекта.
Умение составлять целое из частей (синтез).	Мыслительная операция, которая предусматривает поиск целого через построение существенных связей между выделенными элементами целого.	1) умение выделять основание объединения; 2) умение объединять элементы по заданному основанию; 3) умение преобразовать целое по другому основанию.

**Продолжение таблицы 1.**

**Структура познавательных универсальных учебных действий**

1	2	3
Умение классифицировать (сравнивать, выделять существенные, несущественные признаки объектов).	Поиск существенных и общих признаков, элементов, связей для определенной группы объектов, что создает основы для разделения объектов на группы, подгруппы, классы.	1) умение определять основание классификации объектов; 2) умение распределять элементы по заданному критерию; 3) умение выделять признаки, по которым сравниваются объекты; 4) умение выделять признаки сходства, различия; 5) умение выделять признаки объекта по определенному критерию.
Умение устанавливать причинно-следственные связи.	Мыслительная деятельность по определению связи между явлением (обстоятельством, логическим заключением) и полученным другим явлением (обстоятельством или логическим выводом).	1) умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям; 2) умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям; 3) умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату.

**Продолжение таблицы 1.**

**Структура познавательных универсальных учебных действий**

1	2	3
Постановка и решение проблемы		
Умение формулировать проблему.	Словесное представление осознания противоречивости и/или неоднозначности исходных условий деятельности, с последующим определением дальнейших действий для устранения этих противоречий и/или неоднозначности.	1) умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи; 2) умение определять изменения в условиях; 3) умение определять недостаточную для решения задачи информацию или недостаточность информации для решения задачи.

Познавательные универсальные учебные действия отвечают за следующие функции:

- обеспечение возможностей обучающегося самостоятельно осуществлять учебную деятельность, ставить учебные цели, искать и использовать необходимые средства и способы их достижения, контролировать и оценивать процесс и результаты деятельности;
- создание условий для гармоничного развития личности и её самореализации на основе готовности к непрерывному образованию, необходимость которого обусловлена поликультурностью общества и высокой профессиональной мобильностью;
- обеспечение успешного усвоения знаний, умений и навыков и формирование компетентностей в любой предметной области.

Таким образом, мы определили понятие «познавательные универсальные учебные действия», рассмотрели их структуру и функции.

Рассмотрим условия формирования познавательных универсальных учебных действий на уроках математики.

О. В. Степанова выделяет такие условия формирования познавательных универсальных учебных действий, как максимальный упор на интенсивную мыслительную деятельность обучающихся, ведение образовательного процесса в соответствии с уровнями развития обучающихся [23].

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту процесс обучения должен основываться на системно-деятельностном подходе. Педагог должен включить обучающихся в учебную деятельность, организовать самостоятельные поиск и овладение обучающимися того или иного нового знания.

Важную роль в формировании познавательных универсальных учебных действий играет практическая направленность изучения учебных дисциплин, то есть сближение науки с жизнью.

Таким образом, результатом формирования познавательных универсальных учебных действий школьников при обучении математике являются умения:

- произвольно и осознанно владеть общим приёмом решения задач;
- осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий;
- использовать знаково-символические средства;
- выделять существенную информацию из текстов разных видов;
- осуществлять анализ и синтез;
- планировать и осуществлять деятельность;
- устанавливать причинно-следственные связи;
- устанавливать аналогии и т.д.

## **1.2. Использование задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий**

В процессе обучения математике возникает необходимость обучать учеников решению не только стандартных, но и нестандартных задач, которые нельзя отнести к классу алгоритмически разрешимых. Именно по отношению к нестандартным задачам возникает необходимость в вариативном поиске решения. «Задача предполагает необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно не доступной цели. Решение задач означает нахождение этого средства» [20].

Определённые группы задач, предназначенные для классных и внеклассных занятий, вполне пригодны для выработки «надлежащих навыков мысли», навыков, направленных на поиски решения задач [12].

М. И. Махмутов считает, что «теоретическое осмысление работ лучших учителей помогло обнаружить в учебном процессе общую закономерность активизации познавательной деятельности обучающихся: напряжение интеллектуальных сил ученика вызывается, главным образом, постановкой проблемных вопросов, проблемных познавательных задач и учебных заданий исследовательского характера. Это напряжение рождается в столкновении с трудностью в понимании и осмыслении нового факта или понятия и характеризуется наличием проблемной ситуации, высокого интереса обучающегося к теме, его эмоционального настроения и волевого усилия» [18].

Роль задач в обучении математике очень важная. Через задачу естественно ввести проблемную ситуацию. Разрешив совокупность специально подобранных задач, обучающийся знакомится с существенными элементами новых алгоритмов, овладевает новыми техническими элементами [17].

По мнению А. Эсаулова, в психологии и педагогике обращается внимание преимущественно на то, как решаются уже кем-то найденные и

вполне чётко сформулированные задачи, а не на то, как они обнаруживаются и ставятся [27]. В результате получается, что человек, привыкший видеть перед собой чётко и корректно сформулированную задачу, теряется в незнакомой ситуации, будь то обычная некорректная математическая задача или некая задача, возникшая как следствие из практики (прикладная).

В современном математическом образовании отмечается следующий актуальный аспект: изучение математики должно иметь развивающий характер и прикладную направленность. Подростающему поколению необходимо не только давать конкретную сумму знаний, но прививать ему навыки творчества, интерес к исследованию, формировать у него положительную мотивацию [16].

Интерес к учебной деятельности, подкрепляемый постоянным активным участием в открытии новых истин, проверке гипотез, поиском способа действий в задаче, является основным психологическим условием успешности этой деятельности [16]. Задачей учителя является не только усвоение с его помощью той или иной порцию материала, но и содействовать развитию мыслительных способностей у обучающихся. Основную часть времени на уроке ученик проводит, решая задачи, и во многом от их особенностей (сложности, многогранности, сюжетной формы, последовательности и др.) и зависит, насколько успешным будет процесс обучения математике. На практике получается, что чаще всего процесс решения задач на уроке обладает некоторой рутинностью и оставляет ученику мало возможностей для творчества. Со временем такая специфика задач вырабатывает у обучающегося стереотипное мышление, относящееся к решению задач. Обучающийся просто ищет стандартную ситуацию, к которой можно было бы применить известные формулы и теоремы, и теряется, когда предложенная задача требует любого иного, нестандартного подхода.

По мнению Л.М. Фридмана, одной из основных в обучении математике функций задач является функция формирования и развития у обучающихся общих умений решений любых математических задач [24].

Обучающиеся в настоящее время не получают никаких специальных знаний, на базе которых возможно такое формирование. Более того, в настоящее время эти общие умения формируются чисто стихийно, а не в результате целенаправленного, систематического обучения. Считается, что эти умения могут возникнуть лишь благодаря решению большого числа математических задач.

Большинство обучающихся, встретившись с задачей незнакомого или малознакомого вида, не знают, как к ней подступиться, с чего начать решение. Основную причину этой проблемы Н.В. Метельский видит в неудовлетворительной постановке задач в обучении математике. Он пишет: «Проблема постановки задач в процессе обучения математике до сих пор не нашла удовлетворительного решения (ни в нашей стране, ни за рубежом) ни с точки зрения содержания учебных задач, ни с точки зрения их целевого назначения, ни с точки зрения числа обязательных или необязательных задач, или представления их в виде целостной системы» [19].

Сейчас, когда обучающиеся не имеют систематических знаний о задачах и сущности их решения, главное внимание обучающихся (и учителей) направлено на то, чтобы найти решение задачи и притом как можно быстрее. Времени на анализ исходных и полученных данных, как правило, не остаётся.

В школе не представляется возможным рассмотреть все виды математических задач. Решая всевозможные виды задач в школе, обучающиеся в своей будущей работе встретятся с новыми видами задач, поэтому школа должна вооружать обучающихся общим подходом к решению любого рода задач.

А.Н. Колмогоров считает, что одной из особенностей математики является алгоритмичность решения многих её задач [14]. Под алгоритмом



А.Н. Колмогоров понимает «всякую систему вычислений, выполняемых по строго определённым правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи». Большое количество задач не алгоритмизируется и решается с помощью специальных, особых приёмов, поэтому способность находить пути решения, не подходящие под стандартное правило, является одной из существенных особенностей математического мышления.

В своей таблице, направленной в помощь решателю, Д. Пойа первыми пунктами поставил вопросы: «возможно ли удовлетворить условию?», «достаточно ли условие для определения неизвестного?», «...или недостаточно?», «...или чрезмерно?» «...или противоречиво?» Пойа предполагает решение самых обычных, школьных задач, однако он не исключает возможности наличия некоторых «аномалий» в условии задачи, к существованию которых обучающиеся должны быть готовы.

И. Н. Дегтянникова пишет: «Решая задачу, часто даже не задумываемся о реальности её условия, поэтому правы те авторы, которые включают в свои учебники задачи с нереальными условиями. Это заставляет проверять условия у всех задач. Кроме того, нереальные задачи — это готовая проблемная ситуация» [11].

М. П. Буловацкий считает, что школьник, как правило, игнорирует важные вопросы о переизбыточности, недостаточности или противоречивости задач, так как задачи из школьных учебников не требуют размышления над такими вопросами, потому что в них практически всегда имеется столько данных, сколько необходимо для решения. И это является, по мнению М. П. Буловацкого, серьёзным недостатком математического образования школьников.

По результатам эксперимента, описанного в статье М. П. Буловацкого, переопределённые (с избытком исходных данных) или неопределённые (с недостатком данных) задачи ставят большинство школьников в тупик, из которого они зачастую не в состоянии выбраться. Данные затруднения

возникают в связи с тем, что у школьников не отработан навык отбора и предварительной оценки данных задачи. Как считает М. Буловацкий, отработке этого навыка нужно уделять специальное учебное время [5].

Школьники не в состоянии самостоятельно справиться с задачами указанных типов. Они не ставят перед собой вопросов о переизбыточности, недостаточности или противоречивости условий задач, не анализируют условие задачи, прежде чем начать её решение, не возвращаются с полученным решением к началу задачи, чтобы проверить его. Из чего можно заключить, что сформированность навыков решения математических задач у обучающихся средних школ (даже в специализированных классах), зачастую, является не полной.

Следует отметить, что целенаправленное использование таких задач при обучении геометрии на формирование умения анализировать, синтезировать, обобщать и конкретизировать, что в свою очередь способствует формированию осознания своей деятельности.

Таким образом, из выше сказанного можно сделать вывод, что использование задач в процессе обучения математике весьма несовершенно.

Наборы задач имеющихся школьных учебников не в полной мере удовлетворяют требованиям, предъявляемым к результативности математического образования. Чаще всего, эти задачи относятся к алгоритмически разрешимым, не развивают у обучающихся вариативного мышления, способности размышлять и решать нестандартные задачи, не учат множеству навыков, столь необходимых для решения задач, как школьных, так и бытовых, производственных, научных и т. д.

Решение математических задач требует от обучающихся применения многочисленных мыслительных умений: анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искомые, решаемую задачу с решёнными ранее, выявляя скрытые свойства заданной ситуации; конструировать простейшие математические модели, осуществляя мысленный эксперимент; синтезировать, отбирая полезную для решения задачи информацию,

систематизируя ее; кратко и четко, в виде текста, символически, графически и т. д. оформлять свои мысли; объективно оценивать полученные при решении задач результаты, обобщать, или синтезировать, результаты решения задачи, исследовать особые проявления заданной ситуации.

Собственно, одно из основных назначений задач и упражнений заключается в том, чтобы активизировать мыслительную деятельность обучающихся на уроке. Математические задачи должны, прежде всего, активизировать мыслительную деятельность учеников. Говоря об активации мышления обучающихся, важно учитывать тот факт, что при решении математических задач они не только выполняют построения, преобразования и запоминают формулировки, но и обучаются чёткому мышлению, умению рассуждать, сопоставлять и противопоставлять факты, находить в них общее и различное, делать логически верные умозаключения.

Прежде чем решать задачи необходимо понять сущность самой теории. Одной из тех больших трудностей, которые обучающийся испытывает при решении задач, является отсутствие анализа задач с точки зрения их определяемости и в связи с этим - неумение видеть внутреннюю структуру задачи, неумение видеть процесс образования задачи, а также процесс её «развития» (от более простой задачи).

Рассмотрим понятие определяемости задачи.

Будем называть задачу определяемой, если по данным в ней элементам можно найти все её искомые элементы, и число решений конечно. Определяемыми являются почти все задачи существующих сборников. Заметим, что в условии многих определяемых задач могут отсутствовать данные числовые значения величин или их может быть очень мало, если в этих условиях содержится достаточное количество таких признаков и свойств искомых величин, которые все же позволяют найти эти величины.

Эти признаки и свойства искомых величин часто выступают в виде различных ограничений, накладываемых на эти величины условием задачи, например, принадлежность искомых величин определенному множеству

чисел (натуральных, рациональных и пр.), наличие между ними (или между ними и данными величинами) каких-либо неравенств и другие ограничения, быстро суживающие границы для искомых величин.

Сформулируем принцип определяемости геометрической задачи. Предварительно рассмотрим некоторые термины и положения:

- основными элементами многоугольника (многогранника) принято называть его стороны (рёбра) и углы (плоские, двугранные); первые называют линейными, а вторые – угловыми элементами;
- элементы задачи будем называть независимыми, если никакой из них не может быть выражен через другие;
- если выражение, состоящее из основных элементов фигуры, содержит только углы или только отношения двух элементов одного и того же измерения, то оно будет угловым элементом;
- угловые элементы (их меры) не могут характеризовать линейные размеры фигуры и являются характеристиками лишь формы фигуры; с помощью угловых элементов можно получить представление о фигуре с точностью до подобия (до подобной ей фигуры).

Например, метрическими элементами треугольника являются: биссектриса, медиана, радиус описанной (вписанной) окружности и т. д. Угловыми элементами треугольника являются: угол между высотой и биссектрисой, проведенными из заданной вершины, угол между радиусами описанной и вписанной окружностей и т. д.

Пользуясь введенными положениями, сформулируем принцип определяемости геометрической задачи: геометрическая задача является определяемой, если данная в ней геометрическая фигура определяется (фиксируется) заданием некоторого конечного числа её независимых элементов (независимые элементы фиксируют фигуру, если по данным элементам можно построить конечное число фигур) [16].

Принцип определяемости геометрической задачи может стать в руках учителя хорошим средством улучшения методики преподавания геометрии, а в руках обучающихся – хорошим средством сознательного усвоения геометрии, сознательного составления и решения геометрических задач.

Довести до обучающихся принцип определяемости геометрической фигуры непросто. В связи с чем это нужно делать постепенно, в процессе изучения программного материала. Например, следующим образом.

При изучении признаков равенства треугольников и задач на построение треугольников по данным элементам следует обратить внимание на то, что равенство двух элементов треугольников еще не приводит к равенству этих треугольников и что задание равенства трех элементов «обязывает» (в силу доказываемой теоремы) треугольники быть равными: по двум данным элементам треугольника можно построить бесчисленное множество их, а задание третьего элемента уже фиксирует определенный треугольник. В это время с учащимися можно решать следующие задачи:

- известна сторона треугольника. Можно ли найти остальные две его стороны? (Нет) Почему? (Недостаточно данных) Построить треугольник со стороной, равной 4 см. Сколько существует таких треугольников?

- известен угол треугольника. Можно ли найти остальные его углы? (Нет, недостаточно данных) Стороны? (Аналогично) Построить треугольник с углом, равным  $70^\circ$ , с двумя углами, равными  $70^\circ$  и  $50^\circ$ ? Сколько существует таких треугольников? (В обоих случаях – бесконечно много, поскольку даже во втором случае получим треугольник с точностью до подобного)

- известны две стороны треугольника. Можно ли найти третью сторону? (Нет) Почему эта задача не имеет решения? (Недостаточно данных)

- известна сторона и прилежащий к ней угол треугольника. Можно ли найти остальные стороны и углы треугольника? (Нет). Почему? (Недостаточно данных. По стороне и углу можно построить бесчисленное

множество треугольников). Что необходимо еще знать, чтобы эта задача стала разрешимой? (Вторую сторону, образующую данный угол, или второй угол, прилежащий к данной стороне).

- построить треугольник по стороне 5 см и прилежащему к ней углу  $50^\circ$  (при помощи линейки и транспортира). Сколько решений имеет эта задача? (Бесчисленное множество).

Такие задачи полезно решать с целью подготовки обучающихся к сознательному и осмысленному усвоению признаков различных геометрических фигур.

В итоговой беседе делается вывод: если известны три элемента треугольника, то можно найти остальные его элементы, т.е. треугольник определяется тремя элементами, равнобедренный треугольник – двумя. В дальнейшем при изучении четырехугольников и их построения обучающиеся приходят к выводам, что квадрат определяется одним элементом, ромб и прямоугольник – двумя, параллелограмм и равнобедренная трапеция – тремя, трапеция – четырьмя, четырехугольник вообще – пятью.

Определим понятие «задачи без числовых данных».

Под «задачами без числовых данных» будем понимать определяемые геометрические задачи, в которых отсутствуют числовые данные исходных величин.

Решение таких задач (осуществляемые, в основном, с помощью беседы учителя со всем классом) вносят большую ясность в объяснения учителя, стимулируют интерес обучающихся к изучению той или иной темы, содействуют сознательному усвоению темы.

Заметим, что само изложение нового материала должно тесно сочетаться с идеей определяемости фигуры: это всегда в той или иной мере можно сделать.

Принцип определяемости геометрической задачи является эффективным средством сознательного усвоения основных вопросов школьного курса геометрии. Обучающиеся глубоко осмысливают такой

важный (для развития интереса и сознательного отношения к всевозможным задачам и теоремам) аспект, как «причина».

Заметим, что решение задач играет основную роль в развитии мышления, формировании навыков самостоятельной работы. Именно умение решать задачи наиболее полно характеризует уровень усвоения знаний, показывает, как ученики могут практически применять имеющиеся знания.

Целенаправленное обучение решению задач, с точки зрения их определяемости, которые имеют свою специфику, требующие от обучающихся выявления некоторых особенностей поисковой, анализирующей, рефлексивной деятельности, связанной с решением задачи, способно принести ученикам немалую пользу, активизировать учебно-познавательную деятельность, укрепить их интерес к изучению математики.

Для дальнейших рассуждений рассмотрим этапы решения задачи, выделенные Л. М. Фридманом:

- анализ задачи;
- схематическая запись задачи;
- поиск способа решения задачи;
- осуществление решения задачи;
- проверка решения задачи;
- исследование задачи;
- формулирование ответа;
- познавательный анализ решения задачи [25].

Рассмотрим этапы решения геометрической задачи, выделенные Е. С. Полат:

- чтение условия задачи;
- выполнение чертежа с буквенными обозначениями;
- краткая запись условия задачи;
- составление цепочки действий;
- запись решения задачи;

- запись ответа [21].

Для успешного формирования у обучающихся умений, связанных с реализацией того или иного вида деятельности, необходимо обучать их самостоятельно выполнять каждый из указанных этапов процесса решения задач. Указанные выше типы задач и позволяют ученику усовершенствовать свои умения в каждом из данных видов деятельности.

В процессе поиска решения задачи у обучающихся формируются такие мыслительные операции, как анализ, синтез, сравнение и т.д., умение объяснять этапы решения задач, производить поиск и преобразование информации. При решении разных математических задач активизируются также такие умения, как использовать знаковые, графические модели, схемы, таблицы, диаграммы, создавая и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи [22].

На основании вышесказанного расширим приведённый список этапов решения геометрической задачи: добавим этап «анализ задачи на определяемость» (после этапа «чтение условия задачи»).

Таким образом, под этапами решения геометрической задачи без числовых данных будем понимать следующий перечень.

- чтение условия задачи;
- анализ задачи на определяемость;
- выполнение чертежа с буквенными обозначениями;
- краткая запись условия задачи;
- составление цепочки действий;
- запись решения задачи;
- запись ответа.

Рассмотрим возможности использования геометрических задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.



**Таблица 2.**

Соотнесение этапов решения геометрической задачи без числовых данных с компонентами познавательных универсальных учебных действий

<i>Этапы решения геометрической задачи без числовых данных</i>	<i>Формируемые компоненты познавательных универсальных учебных действий</i>
1	2
Чтение условия задачи.	Умение устанавливать связи между объектами; умение получить информацию из представленного графика, диаграммы, схемы; умение разделять объект на части; умение выделять признаки объекта по определенному критерию.
Анализ задачи на определяемость.	Умение выделить критерии для оценки результата или процесса; умение оценить по заданной системе критериев; умение прогнозировать условия, при которых невозможно решение задачи; умение определять недостаточную для решения задачи информацию или недостаточность информации для решения задачи; умение выделять признаки объекта по определенному критерию.
Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.	Умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; умение разделять объект на части.

**Продолжение таблицы 2.**

Соотнесение этапов решения геометрической задачи без числовых данных с компонентами познавательных универсальных учебных действий

1	2
Краткая запись условия задачи.	Умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; умение устанавливать связи между объектами; умение разделять объект на части; умение располагать части в определенной последовательности; умение характеризовать части этого объекта; умение распределять элементы по заданному критерию; умение определять исходные условия по заданным логическим суждениям; умение определять условия по заданным исходным данным и конечному результату.
Составление цепочки действий.	Умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; умение устанавливать связи между объектами; умение достраивать недостающие элементы совокупности; умение находить ошибки в решении; умение определять наиболее простой способ решения задачи из представленных в определенных условиях; умение определять условия, при которых представленный способ решения задачи будет наиболее простым; умение решить задачу несколькими способами умение располагать части в определенной последовательности; умение выделять основание объединения; умение объединять элементы по заданному основанию; умение преобразовать целое по другому основанию; умение определять истинность логических суждений по заданным исходным условиям.

***Продолжение таблицы 2.***

Соотнесение этапов решения геометрической задачи без числовых данных с компонентами познавательных универсальных учебных действий

1	2
Запись решения задачи.	Умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; умение располагать части в определенной последовательности; умение распределять элементы по заданному критерию.
Запись ответа.	Умение представлять информацию в виде графиков, схем, диаграмм; умение представлять информацию при помощи своей системы обозначений; умение располагать части в определенной последовательности.

Указанное соотнесение позволяет сделать вывод, что на всех этапах решения задач без числовых данных возможно формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

Таким образом, мы показали важность использование геометрических задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

## **Выводы по главе I**

В первой главе на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы определено понятие познавательных универсальных учебных действий. Выделены виды познавательных универсальных учебных действий, их функции и пооперационный состав.

Введён принцип определяемости геометрической задачи, дано определение понятия «задачи без числовых данных».

Рассмотрены этапы решения геометрических задач без числовых данных. За основу взяты этапы решения геометрических задач, представленные Е. С. Полат. В качестве особенности решения задач без числовых данных добавлен этап «анализ задачи на определяемость».

Определены возможности задач без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий. Произведено соотнесение компонентов познавательных универсальных действий с этапами решения геометрических задач без числовых данных. По результатам соотнесения сделан вывод, что решение такого рода задач очень важно для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий, поскольку при работе с этапом «анализ задачи на определяемость» формируются несколько универсальных учебных действий.

## **Глава II. Методические аспекты формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе работы с задачами без числовых данных с точки зрения их определяемости**

### **2.1. Формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся на этапе анализа задачи без числовых данных с точки зрения её определяемости**

При решении геометрических задач без числовых данных следует исходить, прежде всего, из анализа её условия с точки зрения определяемости тех фигур, о которых идет речь в задаче. Такой анализ должен предусматривать: нахождение числа элементов, определяющих фигуру, о которой идет речь, выяснение того, имеется ли в условии задачи достаточное количество данных для её решения.

Анализ задачи с точки зрения её определяемости должен стать существенной частью её решения. В противном случае задача воспринимается обучающимися неполно, искусственно и необоснованно, а это лишает заинтересованности в её решении: обучающиеся не видят, как построена задача.

Проиллюстрируем теоретические положения, сформулированные в первой главе на конкретных примерах работы с задачами без числовых данных для формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

Задача. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$   $CM = m$  – медиана и сторона  $BC = a$ . В треугольник  $BMC$  вписана окружность. Точка касания окружности со стороной  $BM$  делит её пополам. Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .

Рассмотрим возможную организацию деятельности при решении данной задачи без числовых данных в соответствии с этапами, выделенными в первой главе.

1. Чтение условия задачи. На данном этапе обучающимся даётся задание «прочитать условие задачи и ответить на вопросы»:

- Какие фигуры даны в условии задачи? Предполагаемый ответ: треугольник  $ABC$  и окружность, вписанная в треугольник  $BMC$ .
- Какие элементы нам известны в данных фигурах?  
Предполагаемый ответ: в треугольнике  $ABC$  нам известны длины медианы  $CM$  и длина отрезка  $BM$ . Про окружность нам ничего не известно.

На данном этапе у обучающихся формируется такое универсальное учебное действие, как умение устанавливать связи между объектами.

Обучающиеся пришли к выводу, что  $BM$  – это отрезок треугольника  $ABC$ .

2. Анализ задачи на определяемость. Учитель организует совместную деятельность с обучающимися и обсуждает с ними следующие вопросы.

- Сколькими элементами определяется треугольник?  
Предполагаемый ответ: тремя.
- Сколькими элементами определяется окружность?  
Предполагаемый ответ: одним.
- Сколько элементов для треугольника  $ABC$  нам известно?  
Предполагаемый ответ: три (длина медианы и сторона (катет) и прямой угол (т. е. угол в  $90^\circ$ )).
- Какой вывод мы можем сделать по поводу определяемости данного треугольника? Предполагаемый ответ: он определён.

Учитель говорит: «Поскольку треугольник определён, то задача по принципу определяемости задачи также является определяемой. Следовательно, задача имеет решение».

На данном этапе формируется такое умение, как оценка объекта по данному критерию. Известно, что треугольник определяется тремя элементами. В данном случае, в треугольнике нам известны три элемента, поэтому треугольник определён.

3. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями. Обучающиеся делают чертёж в соответствии с условием задачи, сами называют точку касания окружности с отрезком  $BM$ .

Предполагаемый чертёж – рис. 1.

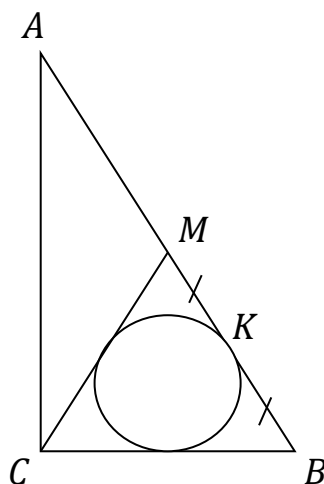


Рис. 1

На данном этапе формируются такие умения, как представление информации в виде графиков и представление информации с помощью собственной системы обозначений.

4. Краткая запись условия задачи. Обучающиеся составляют и записывают краткую запись.

Предполагаемая краткая запись: дано:  $\triangle ABC$ ;  $\angle C$  – прямой;  $CM$  – медиана;  $CM = m$ ;  $BC = a$ ;  $\omega$  – окружность, вписанная в  $\triangle BMC$ ;  $\omega \cap BM = K$ ;  $BK = KM$ . Найти:  $\angle A$  и  $\angle B$ .

5. Составление цепочки действий. Предполагаемая цепочка действий, разработанная самими обучающимися:

- По свойству прямоугольного треугольника (медиана, проведённая из вершины прямого угла равна половине гипотенузы) (рис. 2).
- По условию задачи  $MK = BK$ . Кроме того,  $MK = ML = \frac{1}{2}m$  и  $KB = PB = \frac{1}{2}a$  как отрезки касательных, проведённых к

окружности из одной точки. Следовательно,  $MK = ML = CL = BK = PB$ . То есть,  $\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}a \Rightarrow m = a$ . Таким образом,  $AB = 2BC$ . Следовательно,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ .

На данном этапе формируются такие универсальные умения, как умение устанавливать связи между объектами, умение объединять элементы по заданному основанию.

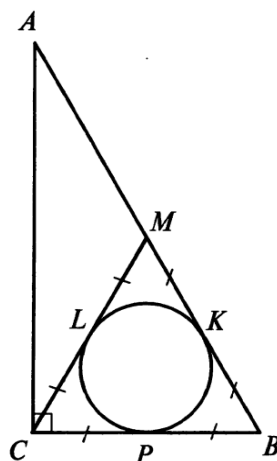


Рис. 2.

6. Запись решения. Обучающие записывают решение в соответствии с проведёнными рассуждениями на предыдущем этапе решения задачи.

На данном этапе формируется такое умение, как умение располагать части в определенной последовательности.

7. Запись ответа. Обучающимся даётся задание «записать ответ». Обучающиеся записывают.

На заключительном этапе формируется такое умение, как умение располагать части в определенной последовательности.



## 2.2. Комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий

В данном пункте представлены примеры организации деятельности учителя и обучающихся 7-9 [9] классов при работе с задачами без числовых данных на этапе анализа задачи на определяемость с целью формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике внешний угол при основании равен  $\alpha$ . Медиана, проведённая к основанию равна  $m$ . Найдите площадь треугольника.

**Таблица 3.**

Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий

<i>Деятельность учителя</i>	<i>Деятельность обучающихся</i>	<i>Формируемые познавательные универсальные учебные действия</i>
1	2	3
Задаёт вопрос: сколькими элементами определяется треугольник?	Отвечают: тремя.	Умение разделять объект на части; умение выделить критерии для оценки результата или процесса.
Задаёт вопрос: сколько элементов нам дано в условии? Какие именно?	Отвечают: два (внешний угол и медиана).	
Задаёт вопрос: можем ли мы утверждать, что треугольник не определён? Обоснуйте ответ.	Отвечают: не можем быть уверенны, так как известны дополнительные характеристики данного треугольника.	
Задаёт вопрос: Какие именно характеристики известны?	Отвечают: известно, что треугольник равнобедренный и что медиана проведена к основанию.	

**Продолжение таблицы 3.**

Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий

1	2	3
Задаёт вопрос: поскольку нам известен внешний угол при основании треугольника, и треугольник является равнобедренным, то можем ли мы составить суждения о каких-либо ещё элементах треугольника, кроме длины данной медианы? Если да, то какие именно?	Отвечают: да, можем. Используя условие, что внешний угол при основании треугольника равен $\alpha$ , делаем вывод, что угол при основании треугольника будет равен $180^\circ - \alpha$ (т.к. он смежный с внешним). Используя условие, что треугольник равнобедренный, делаем вывод, что второй угол при основании также будет равен $180^\circ - \alpha$ .	
Задаёт вопрос: после приведённых рассуждений, сколько теперь элементов треугольника нам известно? Какие именно?	Отвечают: три. Длина медианы и величины двух углов.	
Задаёт вопрос: теперь можно точно сказать, является ли данная фигура определённой? Обоснуйте свой ответ?	Отвечают: да, так как треугольник определяется тремя элементами.	
Задаёт вопрос: следовательно, задача имеет решение?	Отвечают: да.	

Задача 2. Площадь прямоугольного треугольника равна  $S$ , один из катетов равен  $a$ . Найдите радиус описанной окружности.

**Таблица 4.**

**Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий**

<i>Деятельность учителя</i>	<i>Деятельность обучающихся</i>	<i>Формируемые познавательные универсальные учебные действия</i>
1	2	3
Задаёт вопрос: сколькими элементами определяется треугольник?	Отвечают: тремя.	Умение разделять объект на части; умение выделить критерии для оценки результата или процесса.
Задаёт вопрос: сколько элементов нам дано в условии?	Отвечают: один (катет).	
Задаёт вопрос: можем ли мы утверждать, что треугольник не определён? Обоснуйте свой ответ.	Отвечают: не можем быть уверенны, так как известны дополнительные характеристики данного треугольника.	
Задаёт вопрос: Какие именно характеристики известны?	Отвечают: известно, что треугольник прямоугольный и что площадь равна $S$ .	
Задаёт вопрос: поскольку нам известно, что треугольник прямоугольный, известны площадь и один из катетов, то можем ли мы составить суждения о каких-либо ещё элементах треугольника, кроме длины катета? Если да, то какие именно?	Отвечают: да, можем. Используя условие о прямоугольной форме треугольника, делаем вывод, что один из углов равен $90^\circ$ (по определению прямоугольного треугольника). Из того, что нам даны площадь и один из катетов данного треугольника, и используя формулу площади прямоугольного треугольника $S = \frac{1}{2}ab$ , где $a$ и $b$ – катеты, получаем длину второго катета: $b = \frac{2S}{a}$ .	

**Продолжение таблицы 4.**

Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий

<i>Деятельность учителя</i>	<i>Деятельность обучающихся</i>	<i>Формируемые познавательные универсальные учебные действия</i>
1	2	3
Задаёт вопрос: после приведённых рассуждений, сколько теперь элементов треугольника нам известно? Какие именно?	Отвечают: три. Две стороны (катеты) и угол между ними.	
Задаёт вопрос: теперь можно точно сказать, является ли данная фигура определённой? Обоснуйте свой ответ?	Отвечают: да, так как треугольник определяется тремя элементами.	
Задаёт вопрос: следовательно, задача решена?	Отвечают: да.	

Задача 3. В трапецию  $ABCD$  вписана окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ , один из углов при большем основании равен  $\alpha$ . Стороны трапеции пересекаются в точке  $E$  на расстоянии  $a$  от центра окружности. Найдите радиус описанной около треугольника  $BEC$ .

**Таблица 5.**

Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий

<i>Деятельность учителя</i>	<i>Деятельность обучающихся</i>	<i>Формируемые познавательные универсальные учебные действия</i>
1	2	3
Задаёт вопрос: определяемость какой фигуры нам необходимо установить? Обоснуйте свой ответ.	Отвечают: треугольника $BEC$ , т. к. нужно найти радиус окружности, описанной около данного треугольника.	Умение разделять объект на части; Умение выделить критерии для оценки результата или процесса.
Задаёт вопрос: сколькими элементами определяется треугольник?	Отвечают: тремя.	
Задаёт вопрос: какие элементы треугольника $BEC$ нам известны?	Отвечают: никакие.	
Задаёт вопрос: можем ли мы утверждать, что треугольник не определён? Обоснуйте свой ответ.	Отвечают: не можем быть уверенны, так как известны данные других фигур, о которых идёт речь в задаче.	
Даёт задание: рассмотрите эти данные. Задаёт вопрос: могут ли они нам помочь определить какие-либо элементы треугольника $BEC$ ? Если да, то какие именно и каким образом?	Отвечают: поскольку в трапецию вписана окружность, то данная трапеция является равнобедренной, а стороны $BE$ и $EC$ треугольника $BEC$ являются продолжениями боковых сторон $AB$ и $BC$ трапеции. Значит, треугольник также является равнобедренным. Угол при основании трапеции равен $\alpha$ , значит, угол при основании треугольника тоже равен $\alpha$ .	

**Продолжение таблицы 5.**

Организация деятельности обучающихся на этапе анализа задачи на определяемость, направленной на формирование познавательных универсальных учебных действий

1	2	3
Задаёт вопрос: какие ещё элементы нам можно узнать?	Отвечают: поскольку отрезок, соединяющий центр вписанной в трапецию окружность и точку пересечения боковых сторон треугольника $ВЕС$ , то мы знаем, высоту данного треугольника, она равна $a - r$ .	
Задаёт вопрос: после приведённых рассуждений, сколько теперь элементов треугольника $ВЕС$ нам известно? Какие именно?	Отвечают: три (два угла при основании, т.к. треугольник равнобедренный, и высота).	
Задаёт вопрос: теперь можно точно сказать, является ли данная фигура определённой? Обоснуйте свой ответ?	Отвечают: да, так как треугольник определяется тремя элементами.	
Задаёт вопрос: следовательно, задача имеет решение?	Отвечают: да.	

Обобщая вышесказанное, можно сделать следующий вывод, что организация целенаправленной деятельности обучающихся этапе анализа задачи без числовых данных на определяемость позволяет сформировать указанные в первой главе познавательные универсальные учебные действия.

Приведём комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся 7-9-х классов познавательных универсальных учебных действий на уроках геометрии. Предложенные задачи согласно определению, сформулированному в первой главе, являются определяемыми и требуют осуществления их анализа на предмет определяемости.

Комплект задач:

1. Найдите отношение суммы квадратов длин  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  соответственно всех медиан к сумме квадратов длин  $a$ ,  $b$ ,  $c$  всех его сторон соответственно.
2.  $AA_1 = a$ ,  $BB_1 = b$ ,  $CC_1 = c$  – медианы треугольника  $ABC$ ,  $AA_1 \perp CC_1$ . Найдите отношение  $\frac{BB_1}{AC}$ .
3. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой  $c$  проведена биссектриса острого угла  $\alpha$ . Отрезок, соединяющий её основание с точкой пересечения медиан треугольника, перпендикулярен катету. Найдите острые углы треугольника.
4. Найдите острый угол ромба, если известно, что сторона ромба равна  $a$  и является средним геометрическим его диагоналей.
5. Окружность, построенная на основании  $AD = c$  трапеции  $ABCD$  как на диаметре, проходит через середины боковых сторон  $AB = a$  и  $CD = b$  трапеции и касается основания  $BC = d$ . Найдите углы трапеции.
6. Окружность, построенная на высоте  $AD$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает катет  $AB$  в точке  $K$ , а катет  $AC$  – в точке  $M$ . Отрезок  $KM = n$  пересекает высоту  $AD$  в точке  $L$ . Известно, что  $\frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AM} = \frac{a}{b}$ . Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .
7. В треугольнике  $ABC$  угол  $B = \beta$  – тупой. Серединный перпендикуляр к стороне  $AB = c$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $M$ , а серединный перпендикуляр к стороне  $AC$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $N$  (точка  $B$  лежит между  $N$  и  $A$ ). Отрезки  $MN$  и  $BC$  равны и взаимно перпендикулярны. Найдите углы треугольника  $ABC$ .
8. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника, в котором произведение высот в четыре раза меньше произведения его сторон  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

9. Через середину радиуса  $r$  окружности проведена перпендикулярная ему хорда длины  $a$ . Найдите градусную меру меньшей из дуг, на которые окружность делится проведённой хордой.



## **Выводы по главе II**

Во второй главе, в первом пункте приведён пример работы с задачей без числовых данных, направленной на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий. Рассмотрены все этапы решения задачи, а также познавательные универсальные учебные действия, формируемые при работе с каждым этапом.

Во втором пункте представлен комплект задач без числовых данных, а также комментарии по организации деятельности при работе с данными задачами на этапе их анализа на определяемость с целью формированию у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

## Заключение

В настоящее время занятие математикой является не только атрибутом социокультурного развития человека, но и важным фактором профессионального успеха. Изменения общественных, культурных условий находят своё отражение в учебно-воспитательном процессе, что предполагает формирование личности, способной неординарно мыслить, творчески решать поставленные задачи.

Рассмотренная нами проблема использования задач без числовых данных как одного из средств формирования у обучающихся познавательных универсальных учебных действий, имеет прямое отношение к описанным выше требованиям. При работе с задачами такого типа у обучающихся формируется и развивается нестандартное, творческое мышление.

В работе была поставлена цель: разработать комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий на уроках геометрии.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи.

1. На основе анализа психолого-педагогической и методической литературы определить понятие и виды познавательных универсальных учебных действий.

Для решения данной задачи были рассмотрены определения познавательных универсальных учебных действий таких исследователей, как Л.И. Боженковой, А.Г. Асмолова, Н.А. Чулановой и Т.Н. Черняевой, И.Д. Лушниковой и Е.Г. Ногтевой, Л.В. Ведерниковой. Выбрано определение А.Г. Асмолова, поскольку в нём учтены виды деятельности. Также рассмотрены компоненты, входящие в познавательные универсальные учебные действия, описанные А.И. Газейкиной.

2. Выявить возможности задач без числовых данных для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся на уроках геометрии.

Для решения данной задачи был рассмотрен принцип определяемости геометрической задачи, предложенный Д.С. Людмиловым. На основании данного принципа было дано определение понятию «задачи без числовых данных». Предложены этапы решения геометрических задач без числовых данных. За основу взяты этапы решения геометрических задач, рассмотренные Е.С. Полат. В качестве особенности решения геометрических задач без числовых данных добавлен такой этап, как «анализ задачи на определяемость». Далее, с помощью соотнесения этапов решения задачи без числовых данных с компонентами познавательных универсальных учебных действий было продемонстрировано, какие именно познавательные универсальные учебные действия формируются на каждом этапе решения задачи. Было отмечено, что на этапе «анализ задачи на определяемость» формируются несколько познавательных универсальных учебных действий, что обуславливает важность данного этапа при решении задач.

3. Проиллюстрировать на конкретном примере теоретические положения формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся при работе с задачей без числовых данных.

Для решения данной задачи был представлен пример решения задачи без числовых данных с указанием, какие познавательные универсальные учебные действия формируются на каждом этапе решения данной конкретной задачи.

4. Разработать комплект задач без числовых данных, направленных на формирование у обучающихся познавательных универсальных учебных действий.

Для решения данной задачи был разработан комплект задач без числовых данных с комментариями по работе с данными задачами на этапе анализа задачи на определяемость.

Таким образом, все задачи решены, цель работы достигнута.

### Список литературы

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования // Министерство образования и науки РФ – М., 17.12.2010 (с изменениями и дополнениями от 31.12.2015).
2. Аввакумова, И.А., Блинова, Т.Л. Методические аспекты формирования рефлексивной деятельности у учащихся в процессе решения геометрических задач // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. - Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2015. - С. 13-16.
3. Асмолов, А.Г., Бурменская, Г.В., Володарская, И.А., Карабанова, О.А., Молчанов, С.В. и др. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя // Под ред. А.Г. Асмолова. - М.: Просвещение, 2010. - 159 с.
4. Боженкова, Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. - 3-е изд. - М.: Бином, 2015. - 208 с.
5. Буловацкий, М.П. Разнообразить виды задач // Математика в школе. — 1988. — № 23. С. 19-25.
6. Ведерникова, Л.В., Поворознюк, О.А., Бардина, О.Г. Формирование социальной позиции педагога как механизма профилактики виктимности воспитанников // Педагогическое образование и наука. – 2014. - № 3. С. 237-240.
7. Воровщиков С.Г., Орлова, Е.В. Развитие универсальных учебных действий: внутри школьная система учебно-методического и управленческого сопровождения: Монография. М.: МГПУ, 2012. 210 с.
8. Газейкина, А.И., Казакова, Ю.О. Диагностика сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы // Педагогическое образование в России. – 2016. – №7. – С. 161-168.

9. Геометрия. 7-9 классы / Атанасян, Л.С., Бутузов, В.Ф., Кадомцев, С.Б., Позняк, Э.Г., Юдина, И.И., Под ред. Кузнецовой, Л.В. - М.: Просвещение, 2010. - 384 с.
10. Горленко, Н.М., Запятая, О.В., Лебединцев, В.Б., Ушева, Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование . – 2012. – № 4. – С. 153-160.
11. Дегтянникова, И.Н. Остроугольный или тупоугольный // Математика в школе. — 1998. – №5, С. 52-55.
12. Каплан, Б.С. Методы обучения математике // Народная газета. - 1981. С. 13-18
13. Козлов, В.В., Кондаков, А.М. Фундаментальное ядро содержания общего образования. 4-е издание. – М.: Просвещение, 2011. – 79 с.
14. Колмогоров, А.Н. Математика - наука и профессия: Сб. статей для школьников, учителей, студентов. - М.: Наука, 1988. С. 119-157.
15. Лушников, И.Д., Ногтева, Е.Ю. Формирование познавательных универсальных учебных действий в технологиях проектной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся: пособие для учителя. Вологда: ВИРО, 2013. 176 с.
16. Людмилов, Д.С. Задачи без числовых данных.- М: Учпедгиз, 1961. 240 с.
17. Математическое образование: современное состояние и перспективы (к 80-летию со дня рождения профессора А.А. Столяра): Тезисы докладов международной конференции. — Могилёв: МГУ им. А.А.Кулешова, 1999.
18. Махмутов, М.И. Проблемное обучение. — М.: Педагогика, 1975. 73с.
19. Метельский, Н.В. Дидактика математики. Общая методика и её проблемы. — Минск: Издательство БГУ, 1982. 113 с.
20. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. - М.: Наука, 1976. - 448 с.

21. Полат, Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студентов вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров. // Под ред. Е.С. Полат. – М.: «Академия», 2001. – 66 с.
22. Прихожан, А.М., Толстых, Н.Н. Подросток в учебнике и в жизни. – М.: Знание, 1990. 80 с.
23. Степанова, О.В. Формирование познавательных универсальных учебных действий средствами игры // Приоритетные научные направления: от теории к практике. – 2016. - №21. – С. 42-47.
24. Фридман Л.М. Психолого—педагогические основы обучения математике в школе: — М.: Просвещение, 1983. 213 с.
25. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
26. Чуланова, Н.А., Черняева, Т.Н. Нормативный контекст определения «познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - №6. - С. 179-186.
27. Эсаулов, А.Ф. Проблемы решения задач в науке и технике. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1979. 196 с.